

ANALISIS KEKONVERGENAN GLOBAL METODE ITERASI CHEBYSHEV

Poppy Hanggreny^{1*}, M. Imran², Zulkarnain²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*poppyhanggreny07@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the analysis of the global convergence of Chebyshev method through the geometric interpretation of how to derive its formula using the parabolic equation. The results of the analysis are posed in the theorems, which state hypotheses criteria when the Chebyshev method converges globally for any initial guess at some intervals. For comparison, the hypotheses criteria when the Euler method and Halley iteration convergen globally are also discussed. In comparing these methods through the computations, we look into the fulfillment of the hypotheses criteria of the theorems for each method and the number of iterations required to obtain the estimated roots.

Keywords: *nonlinear equations, Chebyshev method, Euler method, Halley method, global convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang analisis kekonvergenan global metode iterasi Chebyshev melalui interpretasi geometri dari penurunan formulanya menggunakan persamaan parabola. Hasil analisis diberikan dalam bentuk teorema yang menyajikan kriteria hipotesis agar metode iterasi Chebyshev konvergen secara global untuk sebarang tebakan awal pada interval tertentu. Sebagai pembandingan dibahas juga kriteria hipotesis agar metode iterasi Euler dan Halley konvergen secara global. Dalam membandingkan diperhatikan terpenuhinya kriteria hipotesis dari ketiga metode iterasi dan jumlah iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar taksiran.

Kata kunci: *persamaan nonlinear, metode Chebyshev, metode Euler, metode Halley, kekonvergenan global.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu topik penelitian di bidang analisis numerik yang berkembang pesat adalah bagaimana menemukan akar dari suatu persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Penelitian yang telah dilakukan berkisar pada menemukan metode baru dengan memodifikasi metode yang telah tersedia, seperti metode iterasi Newton yang bentuk iterasi diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0 \quad \text{dan} \quad f'(x_n) \neq 0.$$

Metode ini memiliki kekonvergenan orde dua [1]. Kriteria hipotesis kekonvergenan global metode Newton dapat dilihat pada [4, h.276].

Melman [6] membahas analisis melalui geometri konvergen global dari metode iterasi orde tiga, yaitu metode iterasi Euler dan Halley, yang penurunannya didasarkan berturut-turut pada persamaan parabola dan hyperbola

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

dan

$$axy(x) + y(x) + bx + c = 0,$$

yang memenuhi kondisi

$$\left. \begin{aligned} y(x_n) &= f(x_n) \\ y'(x_n) &= f'(x_n) \\ y''(x_n) &= f''(x_n) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan kondisi (2) dan setelah penyederhanaan diperoleh formula metode iterasi Euler dan Halley yang berturut diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \sqrt{1 - 2L_f(x_n)}}{\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}. \quad (5)$$

Selain kedua metode tersebut, metode iterasi Chebyshev juga merupakan metode iterasi orde tiga [1]. Metode ini diperoleh melalui persamaan parabola

$$ay(x)^2 + y(x) + bx + c = 0. \quad (6)$$

Bila persamaan (6) diharuskan memenuhi persamaan (2) dan kemudian disederhanakan, diperoleh formula metode iterasi Chebyshev, yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{L_f(x_n)}{2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0, \quad (7)$$

dimana $L_f(x_n)$ diberikan persamaan (5).

Pada artikel ini dibagian dua dibahas analisis kekonvergenan global metode iterasi Chebyshev yang merupakan review dari artikel S. Amat, S. Busquiers, J.M. Gutierrez, M.A. Hernandez, dengan judul "*On The Global Convergence of Chebyshev's Iterative Method*", dengan mengubah salah satu kriteria hipotesis yang ada. Dibagian tiga dilakukan pemeriksaan terhadap kriteria hipotesis dari setiap metode yang didiskusikan terhadap tiga fungsi uji yang akan digunakan dalam simulasi. Dalam simulasi numerik disamping memperhatikan kelakuan kekonvergenan global metode iterasi orde tiga juga diperhatikan banyak iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan akar.

2. ANALISIS KEKONVERGENAN GLOBAL METODE ITERASI CHEBYSHEV

Untuk mendiskusikan kekonvergenan global metode iterasi Chebyshev diperlukan lema berikut:

Lema 1 Misalkan h dan g kontinu dan dapat diturunkan pada $[a, b]$, $h(a) = g(a)$. Definisikan $F(x) = h(x) - g(x)$ pada $[a, b]$. Jika h' monoton naik dan g' konstan maka $F(x) \geq 0$ untuk $x \in [a, b]$.

Bukti:

Pertama perhatikan bahwa

$$F(a) = h(a) - g(a) = 0.$$

Selanjutnya berdasarkan definisi $F(x)$ dan h' dan g' ada, maka

$$F'(x) = h'(x) - g'(x).$$

Karena h' monoton naik dan g' konstan, maka untuk $\tilde{x} \in [a, b]$ berlaku

$$h'(\tilde{x}) \geq h'(a) = g'(a) = g'(\tilde{x}),$$

sehingga $F'(\tilde{x}) = h'(\tilde{x}) - g'(\tilde{x}) \geq 0$. Jadi F monoton naik pada $[a, b]$ yang mengakibatkan $F(x) \geq 0$. ■

Teorema 2 Misalkan $f'''(x)$ kontinu pada interval J yang memuat akar x^* , misalkan $f'(x) \neq 0$, $L_f(x) > 0$ dan $((\eta/f'(x))^2)'' \geq 0$ pada J , dengan $\eta = \text{sign}(f'(x))$. Maka metode Chebyshev akan konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J .

Bukti:

Asumsikan semua kriteria hipotesis Teorema 2 terpenuhi, karena $f'(x) \neq 0$ maka terdapat dua kasus yaitu $f'(x) > 0$ dan $f'(x) < 0$. Sekarang asumsikan $f'(x) > 0$. Untuk memperoleh bentuk umum metode iterasi Chebyshev digunakan persamaan (6) yang merupakan persamaan parabola dengan solusi akarnya diberikan oleh

$$y(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a}. \quad (8)$$

Pandang fungsi $f(x)$ pada interval J yang memuat akar dari $f(x) = 0$. Aproksimasi fungsi $f(x)$ dengan salah satu akar persamaan(8), yaitu

$$f(x) \approx y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a},$$

yang harus memenuhi kondisi (2) di tebakan awal \bar{x} , yaitu

$$f(\bar{x}) = y(\bar{x}) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(b\bar{x} + c)}}{2a}, \quad (9)$$

$$f'(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = \frac{-b}{\sqrt{1 - 4a(b\bar{x} + c)}}, \quad (10)$$

$$f''(\bar{x}) = y''(\bar{x}) = \frac{-2ab^2}{\sqrt{1 - 4a(b\bar{x} + c)}} \frac{1}{1 - 4a(b\bar{x} + c)}. \quad (11)$$

Untuk sebarang tebakan awal \bar{x} pada J , titik-titik hasil iterasi metode Chebyshev diperoleh dari perpotongan parabola $y(x)$ dengan sumbu OX yang dinotasikan dengan \hat{x} .

Untuk menunjukkan titik-titik tersebut konvergen monoton ke x^* , cukup ditunjukkan bahwa \hat{x} selalu berada di antara \bar{x} dan x^* . Dalam membuktikan \hat{x} berada pada interval $[\bar{x}, x^*]$ untuk tebakan awal \bar{x} di kiri x^* , yaitu $\bar{x} \leq x^*$ cukup ditunjukkan $y(x) \geq f(x)$ pada interval $[\bar{x}, x^*]$. Sebaliknya untuk membuktikan \hat{x} berada pada interval $[x^*, \bar{x}]$ untuk tebakan awal \bar{x} di kanan x^* , yaitu $\bar{x} \geq x^*$ cukup ditunjukkan $y(x) \leq f(x)$ pada interval $[x^*, \bar{x}]$.

(i) Kondisi $\bar{x} \leq x^*$

Perhatikan bahwa untuk kondisi ini $f(\bar{x}) < 0$. Untuk menunjukkan bahwa tidak mungkin \hat{x} berada di sebelah kiri \bar{x} dilakukan secara kontradiksi.

Andaikan $\hat{x} < \bar{x}$, maka $\hat{x} - \bar{x} < 0$ jika dan hanya jika

$$L_f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^2} > 0,$$

sehingga $f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$ yang mengakibatkan $f''(\bar{x}) < 0$.

Berdasarkan definisi dari \bar{x} dan \hat{x} , diperoleh $y(\hat{x}) = 0$, $f(\bar{x}) = y(\bar{x})$, $f'(\bar{x}) = y'(\bar{x})$, dan $f''(\bar{x}) = y''(\bar{x})$, dan ekspansi Taylor dari $y(\hat{x})$ di sekitar $\hat{x} = \bar{x}$, adalah

$$0 = y(\hat{x}) = y(\bar{x}) + y'(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}) + \frac{y''(\bar{x})}{2}(\hat{x} - \bar{x})^2 + \frac{y'''(\bar{x})}{6}(\hat{x} - \bar{x})^3. \quad (12)$$

Selanjutnya dengan menurunkan persamaan (8) diperoleh $y'(x) = (-b)/\sqrt{1 - 4a(bx + c)}$ dan $y'''(x) = (-12a^2b^3)/(\sqrt{1 - 4a(bx + c)}(1 - 4a(bx + c))^2)$. Jadi $y'''(x) > 0$. Di samping itu, $\hat{x} - \bar{x} < 0$, $y(\bar{x}) < 0$, $y'(\bar{x}) > 0$ dan $y''(\bar{x}) < 0$ yang mengakibatkan tidak mungkin ruas kanan pada persamaan (12) adalah nol. Jadi haruslah $\bar{x} \leq \hat{x}$.

Selanjutnya dari hipotesis, $((1/f'(x))^2)'' \geq 0$ sehingga $(1/f'(x))^2$ merupakan fungsi konveks [3]. Persamaan (10) dapat ditulis menjadi

$$\left(\frac{1}{f'(\bar{x})}\right)^2 = \frac{1 - 4a(b\bar{x} + c)}{(-b)^2},$$

dan dengan menggunakan Lema 1, untuk $[a, b] = [\bar{x}, x^*]$, $h(x) = (1/f'(x))^2$ dan $g(x) = (1 - 4a(bx + c))/(-b)^2$ diperoleh

$$\left(\frac{1}{f'(x)}\right)^2 \geq \frac{1 - 4a(bx + c)}{(-b)^2}, \quad (13)$$

dimana $(1 - 4a(bx + c))/(-b)^2$ mengaproksimasi $(1/f'(x))^2$ sampai orde kedua. Kemudian pertidaksamaan (13) dapat ditulis menjadi

$$\frac{-b}{\sqrt{1 - 4a(bx + c)}} \geq f'(x) > 0. \quad (14)$$

atau

$$\int_{\bar{x}}^x \frac{-b}{\sqrt{1 - 4a(bt + c)}} dt \geq \int_{\bar{x}}^x f'(t) dt. \quad (15)$$

Jadi, pertidaksamaan (15) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a} - \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(b\bar{x} + c)}}{2a} \geq f(x) - f(\bar{x}).$$

Selanjutnya, karena $f(\bar{x}) = y(\bar{x})$ maka

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a(bx + c)}}{2a} \geq f(x), \quad \text{untuk } x \in [\bar{x}, x^*], \quad (16)$$

sehingga diperoleh suatu barisan monoton naik dengan x^* merupakan batas atas.

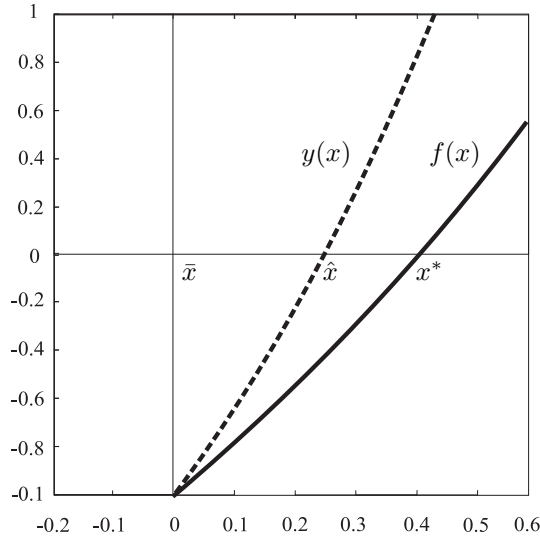
(ii) Kondisi $\bar{x} \geq x^*$

Perhatikan bahwa untuk kondisi ini $f(\bar{x}) < 0$. Untuk menunjukkan bahwa tidak mungkin \hat{x} berada di sebelah kanan \bar{x} dilakukan secara kontradiksi.

Andaikan $\hat{x} > \bar{x}$, maka $\hat{x} - \bar{x} > 0$ jika dan hanya jika

$$L_f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^2} > 0,$$

sehingga $f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$ yang mengakibatkan $f''(\bar{x}) < 0$. Selanjutnya, dengan menerapkan langkah yang sama pada kondisi (i), maka tidak mungkin bahwa $\hat{x} \geq \bar{x}$, sehingga dapat disimpulkan $\bar{x} \geq \hat{x}$.



Gambar 1: Ilustrasi Geometri $f'(x) > 0, y(x) \geq f(x), x \in [\bar{x}, x^*]$

Selanjutnya dari hipotesis, $((1/f'(x))^2)'' \geq 0$ sehingga $(1/f'(x))^2$ merupakan fungsi konveks. Jadi pada interval $[x^*, \bar{x}]$ pertidaksamaan (14) juga berlaku, yang untuk kondisi (ii) dapat ditulis menjadi

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{-b}{\sqrt{1-4a(bt+c)}} dt \geq \int_x^{\bar{x}} f'(t) dt, \quad (17)$$

atau

$$\frac{-1 + \sqrt{1-4a(b\bar{x}+c)}}{2a} - \frac{-1 + \sqrt{1-4a(bx+c)}}{2a} \geq f(\bar{x}) - f(x).$$

Diketahui bahwa $f(\bar{x}) = y(\bar{x})$ maka

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-4a(bx+c)}}{2a} \leq f(x), \quad \text{untuk } x \in [x^*, \bar{x}]. \quad (18)$$

Dengan demikian diperoleh suatu barisan monoton turun dengan x^* merupakan batas bawah. ■

Teorema 3 Misalkan $f'''(x)$ kontinu pada interval J yang memuat akar x^* dengan $f'(x) \neq 0$.

- (i) Metode Euler konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J dan $L_f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- (ii) Metode Halley konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J dan $L_f(x) \leq 2$ dan $L_{f'}(x) \leq \frac{3}{2}$.
- (iii) Metode Chebyshev konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J dan $L_{f'}(x) \leq 3$.

Bukti:

Asumsikan semua hipotesis Teorema 3 terpenuhi, karena $f'(x) \neq 0$ maka terdapat

dua kasus yaitu $f'(x) > 0$ dan $f'(x) < 0$. Akan dibuktikan untuk kasus $f'(x) > 0$.
 (i) Untuk menunjukkan $L_f(x) \leq \frac{1}{2}$, akan ditunjukkan dengan kontradiksi. Andaikan $L_f(x) > \frac{1}{2}$. Berdasarkan definisi dari bentuk metode iterasi Euler, $\hat{x} - \bar{x} < 0$ jika dan hanya jika

$$L_f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^2} > \frac{1}{2}.$$

Diketahui bahwa $\bar{x} < x^*$, maka $f(\bar{x}) < f(x^*)$ yang mengakibatkan $f(\bar{x}) < 0$. Selanjutnya, karena $f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$ maka diperoleh $f''(\bar{x}) < 0$. Berdasarkan definisi dari \bar{x} dan \hat{x} , diperoleh $y(\hat{x}) = 0$, $f(\bar{x}) = y(\bar{x})$, $f'(\bar{x}) = y'(\bar{x})$, dan $f''(\bar{x}) = y''(\bar{x})$. Dengan menggunakan polynomial Taylor untuk $y(\hat{x})$ disekitar \bar{x} , diperoleh

$$0 = y(\hat{x}) = y(\bar{x}) + y'(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}) + \frac{y''(\bar{x})}{2}(\hat{x} - \bar{x})^2 + \frac{y'''(\psi)}{6}(\hat{x} - \bar{x})^3. \quad (19)$$

Karena metode iterasi Euler menggunakan persamaan parabola $y(x) = ax^2 + bx + c$, maka $y'''(x) = 0$. Di samping itu, $\hat{x} - \bar{x} < 0$, $y(\bar{x}) < 0$, $y'(\bar{x}) > 0$, dan $y''(\bar{x}) < 0$, maka tidak mungkin ruas kanan pada persamaan (19) adalah nol. Jadi, tidak mungkin $L_f(x) > \frac{1}{2}$, sehingga diperoleh $L_f(x) \leq \frac{1}{2}$. Dengan kata lain, berdasarkan definisi dari bentuk umum metode iterasi Euler, $L_f(x) \leq \frac{1}{2}$ jika dan hanya jika $\hat{x} - \bar{x} > 0$ dan diperoleh suatu barisan konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J .

(ii) Dalam membuktikan $L_f(x)$ untuk metode iterasi Halley, diterapkan langkah yang sama seperti pada metode iterasi Euler. Perbedaannya hanya pada persamaan $y(x)$, yaitu untuk metode iterasi ini digunakan persamaan hyperbola $y(x)$ dengan bentuk

$$y(x) = a + \frac{b}{x + c}. \quad (20)$$

Akan ditunjukkan bahwa $L_f(x) \leq 2$ dengan kontradiksi. Andaikan $L_f(x) > 2$. Berdasarkan definisi dari bentuk umum metode iterasi Halley, $\hat{x} - \bar{x} < 0$ jika dan hanya jika

$$L_f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^2} > 2.$$

Selanjutnya diterapkan langkah yang sama pada kasus (i) untuk metode iterasi Euler, maka diperoleh $f(\bar{x}) < 0$ dan $f''(\bar{x}) < 0$. Berdasarkan definisi dari \bar{x} dan \hat{x} , diperoleh $y(\hat{x}) = 0$, $f(\bar{x}) = y(\bar{x})$, $f'(\bar{x}) = y'(\bar{x})$, dan $f''(\bar{x}) = y''(\bar{x})$. Dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $y(\hat{x})$ disekitar $\hat{x} = \bar{x}$, diperoleh

$$0 = y(\hat{x}) = y(\bar{x}) + y'(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}) + \frac{y''(\bar{x})}{2}(\hat{x} - \bar{x})^2 + \frac{y'''(\psi)}{6}(\hat{x} - \bar{x})^3. \quad (21)$$

Karena $y'''(x) = \frac{-6b}{(x+c)^4}$ dan $y'(x) = \frac{-b}{(x+c)^2}$, maka $y'''(x) > 0$. Di samping itu, $\hat{x} - \bar{x} < 0$, $y(\bar{x}) < 0$, $y'(\bar{x}) > 0$, dan $y''(\bar{x}) < 0$, maka tidak mungkin ruas kanan pada persamaan (21) adalah nol, sehingga tidak mungkin

$$L_f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^2} > 2.$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa berdasarkan definisi dari bentuk umum metode iterasi Halley, $L_f(x) \leq 2$ jika dan hanya jika $\hat{x} - \bar{x} > 0$ dan diperoleh suatu barisan konvergen monoton ke x^* untuk sebarang tebakan awal pada interval J .

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $L_{f'}(x) \leq \frac{3}{2}$, maka dengan menyatakan ruas kanan dari persamaan (4) dengan $F(x)$, persamaan (4) menjadi

$$F(x) = x - \frac{2}{2 - L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$F'(x) = L_f(x)^2 \left(\frac{3 - 2L_{f'}(x)}{(2 - L_f(x))^2} \right).$$

Misalkan $p(x) = L_f(x)^2 = \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)^2$ dan $q(x) = \frac{3 - 2L_{f'}(x)}{(2 - L_f(x))^2}$. Karena telah diketahui bahwa $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$, dan $f''(x) < 0$, maka $p(x) \geq 0$ dan $q(x) \geq 0$. Sehingga $F'(x) \geq 0$ jika

$$\frac{3 - 2L_{f'}(x)}{(2 - L_f(x))^2} \geq 0,$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$L_{f'}(x) \leq \frac{3}{2},$$

dengan

$$L_{f'}(x) = \frac{f'(x)f'''(x)}{f''(x)^2}.$$

(iii) Untuk membuktikan $L_{f'}(x) \leq 3$, dapat dinyatakan ruas kanan dari persamaan (7) dengan $F(x)$, sehingga persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{L_f(x)}{2} \right), \quad (22)$$

dengan turunan pertama dari persamaan (22) adalah

$$F'(x) = L_f(x)^2 \left(\frac{3 - L_{f'}(x)}{2} \right).$$

Misalkan $m(x) = L_f(x)^2 = \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)^2$ dan $n(x) = \frac{3 - L_{f'}(x)}{2}$. Karena telah diketahui bahwa $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$, dan $f''(x) < 0$, maka $m(x) \geq 0$ dan $n(x) \geq 0$. Sehingga $F'(x) \geq 0$ jika

$$\frac{3 - L_{f'}(x)}{2} \geq 0,$$

$$L_{f'}(x) \leq 3.$$

Berdasarkan penjabaran dari Teorema 3, untuk kasus $f'(x) > 0$ ada tambahan kriteria hipotesis

$$L_{f'}(x) = \frac{f'(x)f'''(x)}{f''(x)^2},$$

dan hal ini sesuai dengan beberapa bagian kasus tentang metode iterasi Chebyshev yang diberikan di [5]. ■

3. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan kekonvergenan dari metode iterasi Euler (ME), metode iterasi Halley (MH), dan metode iterasi Chebyshev (MC) dalam hal banyak iterasi yang diperoleh untuk mendapatkan akar pendekatan dari tiga fungsi uji, dengan terlebih dahulu memeriksa kriteria hipotesis dari setiap metode terhadap fungsi. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 1 & x^* &= 1.0000000000000000 \\ f_2(x) &= x^3 + 4x^2 - 15 & x^* &= 1.6319808055660634 \\ f_3(x) &= \sin^2 x + x^2 - 1 & x^* &= 0.7557348512064257 \end{aligned}$$

Perbandingan ketiga fungsi di atas menggunakan program MATLAB R2010a dengan kriteria pemberhentian yang sama untuk setiap metode adalah

1. Jika tebakan awal berada dalam interval yang diberikan.
2. Jika selisih nilai mutlak antara dua iterasi yang berdekatan bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
3. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
4. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi.

Tabel 1 menunjukkan hasil pengujian kriteria hipotesis untuk setiap metode terhadap tiga fungsi, dimana pada Tabel 1 kriteria hipotesis dari metode iterasi Halley terpenuhi oleh semua fungsi uji. Untuk metode iterasi Euler dan Chebyshev, ada satu kriteria hipotesis yang tidak terpenuhi dengan 3* dan 4* berturut-turut menunjukkan tiga dan empat kriteria hipotesis terpenuhi.

Selanjutnya dengan sebarang tebakan awal yang diambil pada $J = (0, 2)$, maka akan dibandingkan banyak iterasi yang diperoleh dari setiap metode dengan menggunakan program Matlab R2010a.

Pada Tabel 2 di halaman 11 dapat dilihat untuk MC dengan tebakan awal $x_0 = 0.25$ hasilnya tidak konvergen monoton. Hal ini dikarenakan titik iterasi yang dihasilkan tidak berada pada J dan titik ini merupakan salah satu titik yang mengakibatkan salah satu kriteria hipotesis dari MC tidak terpenuhi. Tetapi, jika tebakan awal yang diambil memenuhi kriteria hipotesis dari metode, maka akan menghasilkan titik-titik iterasi yang konvergen monoton ke akar pendekatannya. Secara keseluruhan, dari hasil akar yang diperoleh semua metode iterasi konvergen

Tabel 1: Hasil Pengujian Kriteria Hipotesis ME, MH, dan MC

Nomor Fungsi	Metode	Kriteria Hipotesis pada $J = (0, 2)$	Ket
1	ME	$f'''(x) = 0$ kontinu $f'(x) = 2x > 0$ $L_f(x) = 2(x^2 - 1)/(2x)^2 \leq \frac{1}{2}$ $f'(x)f'''(x) = (2x)(0) \not\leq 0$	3*
	MH	$f'''(x) = 0$ kontinu $f'(x) = 2x > 0$ $L_f(x) = 2(x^2 - 1)/(2x)^2 \leq 2$ $(1/\sqrt{f'(x)})'' = \frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{x^5}} \geq 0$	4*
	MC	$f'''(x) = 0$ kontinu $f'(x) = 2x > 0$ $L_f(x) = 2(x^2 - 1)/(2x)^2 \not\leq 0$ $((1/f'(x))^2)'' = \frac{3}{2x^4} \geq 0$	3*
2	ME	$f'''(x) = 6$ kontinu $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ $L_f(x) = \frac{(x^3 + 4x^2 - 15)(6x + 8)}{(3x^2 + 8x)^2} \leq \frac{1}{2}$ $f'(x)f''(x) = (3x^2 + 8x)(6) \not\leq 0$	3*
	MH	$f'''(x) = 6$ kontinu $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ $L_f(x) = \frac{(x^3 + 4x^2 - 15)(6x + 8)}{(3x^2 + 8x)^2} \leq 2$ $(1/\sqrt{f'(x)})'' = \frac{3(6x + 8)^2}{4\sqrt{(3x^2 + 8x)^5}} - \frac{3}{\sqrt{(3x^2 + 8x)^3}} \geq 0$	4*
	MC	$f'''(x) = 6$ kontinu $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ $L_f(x) = \frac{(x^3 + 4x^2 - 15)(6x + 8)}{(3x^2 + 8x)^2} \not\leq 0$ $((1/f'(x))^2)'' = \frac{6(6x + 8)^2}{(3x^2 + 8x)^4} - \frac{12}{(3x^2 + 8x)^3} \geq 0$	3*
3	ME	$f'''(x) = -8 \sin x \cos x$ kontinu $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x > 0$ $L_f(x) = \frac{(\sin^2 x + x^2 - 1)(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2)}{(2 \sin x \cos x + 2x)^2} \leq \frac{1}{2}$ $f'(x)f'''(x) = (2 \sin x \cos x + 2x)(-8 \sin x \cos x) \not\leq 0$	3*
	MH	$f'''(x) = -8 \sin x \cos x$ kontinu $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x > 0$ $L_f(x) = \frac{(\sin^2 x + x^2 - 1)(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2)}{(2 \sin x \cos x + 2x)^2} \leq 2$ $(1/\sqrt{f'(x)})'' = \frac{3}{4} \frac{(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2)^2}{\sqrt{(2 \sin x \cos x + 2x)^5}} - \frac{4 \sin x \cos x}{\sqrt{(2 \sin x \cos x + 2x)^3}} \geq 0$	4*
	MC	$f'''(x) = -8 \sin x \cos x$ kontinu $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2x > 0$ $L_f(x) = \frac{(\sin^2 x + x^2 - 1)(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2)}{(2 \sin x \cos x + 2x)^2} \not\leq 0$ $((1/f'(x))^2)'' = \frac{6(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2)^2}{(2 \sin x \cos x + 2x)^4} - \frac{2(-8 \sin x \cos x)}{(2 \sin x \cos x + 2x)^3} \geq 0$	3*

Tabel 2: Hasil Komputasi Perbandingan Kekonvergenan ME, MH, dan MC

f_i	J	x_0	Metode	n	x_{n+1}	KM/TKM
f_1	$(0, 2)$	0.25	ME	1	1.0000000000000000	KM
			MH	4	1.0000000000000000	KM
			MC	1	-4.9062500000000000	TKM
		1.8	ME	1	0.9999999999999999	KM
			MH	4	1.0000000000000000	KM
			MC	4	1.0000000000000000	KM
f_2	$(0, 2)$	0.25	ME	5	1.6319808055660634	KM
			MH	6	1.6319808055660634	KM
			MC	1	-91.5316676384839670	TKM
		1.8	ME	4	1.6319808055660634	KM
			MH	4	1.6319808055660636	KM
			MC	4	1.6319808055660634	KM
f_3	$(0, 2)$	0.25	ME	3	0.7390851332151607	KM
			MH	4	0.7390851332151607	KM
			MC	1	-0.3898532667721553	TKM
		1.8	ME	3	0.7390851332151608	KM
			MH	3	0.7390851332151607	KM
			MC	3	0.7390851332151607	KM

global ke akar pendekatannya pada interval J dan dari hasil perbandingan dengan memilih tebakan awal yang sama pada interval yang digunakan terlihat bahwa MH lebih unggul dari ME dan MC dimana dari setiap fungsi uji memenuhi semua kriteria hipotesis dari MH.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Amat, S., S. Busquier & J.M. Gutierrez. 2003. Geometric constructions of iterative functions to solve equations, *J. Comput. Appl. Math.* **157**(1): 197-205.
- [2] Amat, S., S. Busquier, J.M. Gutierrez & M.A. Hernandez. 2008. On the Global convergence of Chebyshev's iterative methods, *J. Comput. Appl. Math.* **220**: 17-21.
- [3] Bartle, R. G. & D. R. Shebert. 1994. *Introduction to Real Analysis*, 4th Ed. John Wiley & Sons Inc, Singapore.
- [4] Gautschi W. 2011. *Numerical Analysis*, 2nd Ed. Birkhauser, New York.
- [5] Hernandez, M.A. & M.A. Salanova. 1993. A family of Chebyshev-Halley type methods, *Internet. J. Comput. Math.* **47**: 59-63.
- [6] Melman, A. 1997. Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, *SIAM Rev.* **39**(4): 728-735.